第23講　立体図形の計量

Step 1

1　図1～図3のように，6つの点A，B，C，D，E，Fを頂点とする三角柱ABCDEFがあり，側面はいずれも底面に垂直で，AB = BC = AD = 4 cm，∠ABC = 90°である。このとき，次の問いに答えなさい。

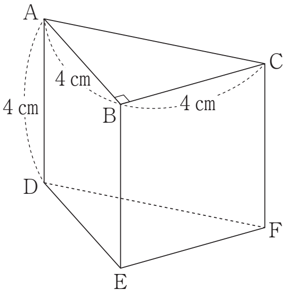
図1


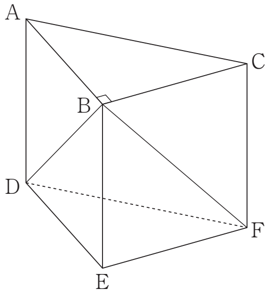
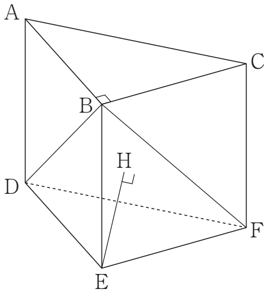
図2


図3


問1　図1の三角柱ABCDEFにおいて，辺ABとねじれの位置にある辺は全部で何本あるか。

問2　三角柱ABCDEFの体積は何 cm^3 か。

問3　図2において，∠DBFの大きさは何度か。

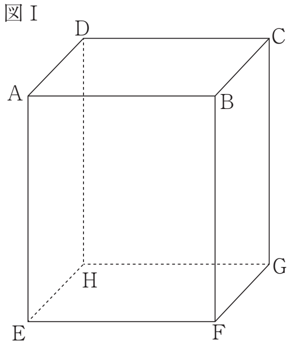
問4　図2において，△BDFの面積は何 cm^2 か。

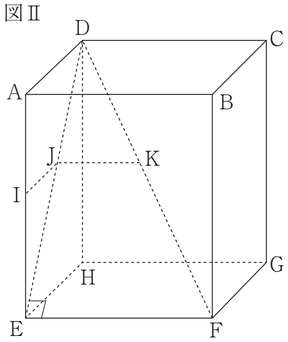
問5　図3のように，点Eから△BDFにひいた垂線と△BDFとの交点をHとする。このとき，線分EHの長さは何cmか。

【長崎県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

2　図Ⅰ，図Ⅱにおいて，立体 ABCD―EFGH は直方体である。次の問いに答えなさい。答えが根号をふくむ形になる場合は，その形のままでよい。





(1)　図Ⅰにおいて，次のア～カのうち，面 BFGC と垂直な辺はどれですか。すべて選び，記号を書きなさい。

ア　辺 AB　　イ　辺 AD　　ウ　辺 AE　　エ　辺 BF　　オ　辺 FG　　カ　辺 GH

(2)　図Ⅱにおいて，AB = 5 cm，AD = 4 cm，AE = 6 cm である。D と E，D と F とをそれぞれ結ぶ。I は辺 AE 上にあって，A，E と異なる点である。J は I を通り辺 AD に平行な直線と線分 DE との交点である。K は J を通り辺 EF に平行な直線と線分 DF との交点である。このとき，△DEF は∠DEF = 90° の直角三角形である。AI = x cm とし，$0 < x < 6$ とする。

①　△DEF の面積を求めなさい。

②　IJ = JK となるときの x の値を求めなさい。求め方も書くこと。

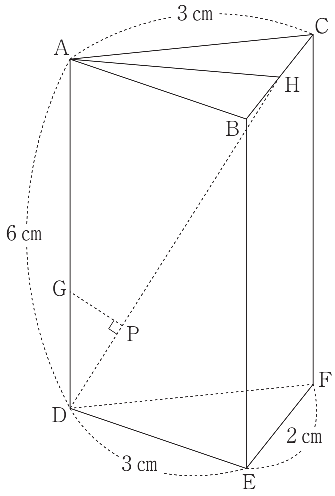
【大阪府】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

Step　2

③　右の図は，点 A，B，C，D，E，F を頂点とし，3 つの側面がそれぞれ長方形である三角柱で，AC = 3 cm，AD = 6 cm，DE = 3 cm，EF = 2 cm である。点 G は辺 AD 上にあって，AG = 4 cm である。また，点 H は辺 BC の中点であり，点 P は線分 DH 上にあって，∠GPD = 90° である。

このとき，次の各問いに答えなさい。ただし，根号がつくときは，根号のついたままで答えること。



⑴　線分 AH の長さを求めなさい。

⑵　線分 DP の長さを求めなさい。

⑶　三角すい PEFH の体積を求めなさい。

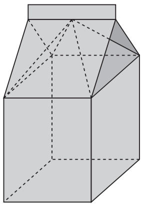
【熊本県】

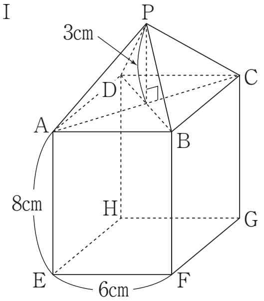
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

Step 3

4 次のような紙パックがある。図Ⅰは，この紙パックを参考に，正四角錐(すい)と直方体をあわせてつくった立体の紙の容器である。

正四角錐の高さは3cm，直方体の底面EFGHは1辺が6cmの正方形で，その高さを8cmとするとき，後の1〜4の問いに答えなさい。ただし，紙の厚さや容器の変形は考えないものとする。

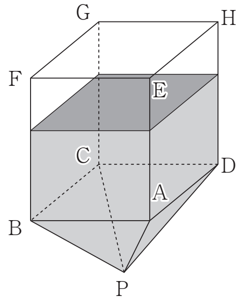


図Ⅰ


1 図Ⅰにおいて，底面EFGHの対角線EGの長さを求めなさい。

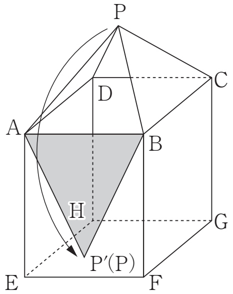
2 図Ⅱは，水平に置いた図Ⅰの容器に，底面EFGHから5.5cmの高さまで水を入れたものを，水が漏(も)れないように上下を反対にし，底面EFGHが水平になるようにしたものである。

このとき，水面から底面EFGHまでの高さを求めなさい。

図Ⅱ


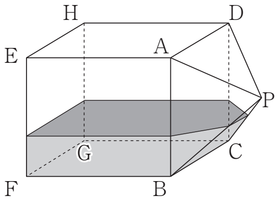
3 図Ⅲは，図Ⅰの容器の辺PA，PBを切り離し，△PABの面を，辺ABを軸として，外側に回転させ，△P′ABの面を直方体の面AEFBにぴったりくっつけたものである。

点Pが点P′まで動いたとき，点Pが動いてできる線の長さを求めなさい。ただし，円周率はπとする。

図Ⅲ


4 図Ⅳは，図Ⅰの容器の面BCGFを下にして水平に置き，この面から2cmの高さまで水を入れたものである。

このとき，はいっている水の体積を求めなさい。

図Ⅳ


【宮崎県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

第23講　立体図形の計量

Step 1

1　問1．3（本）　問2．32（cm^3）　問3．（∠DBF ＝）60°　問4．$8\sqrt{3}$（cm^2）

問5．$\frac{4\sqrt{3}}{3}$（cm）

≪解説≫

問1．辺CF，辺EF，辺DFの3本。

問2．$\left(\frac{1}{2} \times 4 \times 4\right) \times 4 = 32$（$cm^3$）

問3．線分BD，DF，FBはすべて，等しい辺が4cmの直角二等辺三角形の斜辺だから，長さは$4\sqrt{2}$cm。よって，△DBFは正三角形なので，∠DBF ＝ 60°

問4．1辺の長さが$4\sqrt{2}$cmの正三角形の高さは，$4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6}$（cm）　よって，

$\triangle BDF = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = 8\sqrt{3}$（$cm^2$）

問5．三角すいBDEFの体積は，$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 4\right) \times 4 = \frac{32}{3}$（$cm^3$）　線分EHは，三角すいBDEFにおいて，底面を△BDFとしたときの高さなので，線分EHの長さを$x$cmとすると，$\frac{1}{3} \times 8\sqrt{3} \times x = \frac{32}{3}$が成り立つ。これを解くと，$x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

2　(1) ア・カ　(2) ① $5\sqrt{13}$（cm^2）　②（xの値）$\frac{8}{3}$

≪解説≫

(1) 辺AD，辺AEは面BFGCに平行，辺BF，辺FGは面BFGCにふくまれる。

(2) ① △ADEに三平方の定理を用いると，$DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$（cm）　よって，$\triangle DEF = \frac{1}{2} \times EF \times DE = \frac{1}{2} \times 5 \times 2\sqrt{13} = 5\sqrt{13}$（$cm^2$）

② IJ∥ADより，IJ：AD ＝ EI：EA　EI ＝（$6 - x$）cmだから，IJ：4 ＝（$6 - x$）：6より，$IJ = \frac{2}{3}(6 - x)$（cm）　また，JK∥EFより，JK：EF ＝ DJ：DE ＝ AI：AE

よって，JK：5 ＝ x：6より，$JK = \frac{5}{6}x$（cm）　IJ ＝ JKだから，$\frac{2}{3}(6 - x) = \frac{5}{6}x$

これを解いて，$x = \frac{8}{3}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

Step　2

3　(1) $2\sqrt{2}$ (cm)　(2) $\dfrac{6\sqrt{11}}{11}$ (cm)　(3) $\dfrac{32\sqrt{2}}{11}$ (cm^3)

≪解説≫

(1) △ABC は，AB = AC の二等辺三角形で，H は辺 BC の中点だから，AH ⊥ BC となる。よって，$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$ (cm)

(2) △DPG と△DAH は，∠DPG = ∠DAH = 90°，∠D が共通だから，相似となる。よって，DP：DA = DG：DH　DG = AD − AG = 6 − 4 = 2 (cm)，$DH = \sqrt{AD^2 + AH^2} = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{11}$ (cm) より，DP：6 = 2：$2\sqrt{11}$　$2\sqrt{11}DP = 12$ より，$DP = \dfrac{6}{\sqrt{11}} = \dfrac{6\sqrt{11}}{11}$ (cm)

(3) 三角すい PEFH の体積は，(三角すい HDEF) − (三角すい PDEF) で求められる。△DEF = △ABC = $\dfrac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ (cm^2) だから，三角すい HDEF = $\dfrac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \times 6 = 4\sqrt{2}$ (cm^3)　また，DP：DH = $\dfrac{6\sqrt{11}}{11}$：$2\sqrt{11}$ = 3：11 だから，三角すい PDEF と三角すい HDEF は，△DEF を底面としたときの高さの比が 3：11 となり，体積の比も 3：11 となる。これより，三角すい PDEF = $4\sqrt{2} \times \dfrac{3}{11} = \dfrac{12\sqrt{2}}{11}$ (cm^3)

よって，三角すい PEFH = $4\sqrt{2} - \dfrac{12\sqrt{2}}{11} = \dfrac{32\sqrt{2}}{11}$ (cm^3)

Step　3

4　1. $6\sqrt{2}$ (cm)　2. 3.5 (cm)　3. $\dfrac{15\sqrt{2}}{4}\pi$ (cm)　4. $\dfrac{316}{3}$ (cm^3)

≪解説≫

1. △EFG は直角二等辺三角形だから，EF：EG = 1：$\sqrt{2}$　よって，$EG = \sqrt{2}EF = 6\sqrt{2}$ (cm)

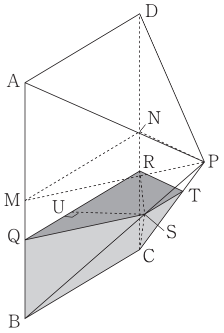
2. 容器に入れた水の体積は，6 × 6 × 5.5 = 198 (cm^3) で，正四角錐の体積は，$6 \times 6 \times 3 \times \dfrac{1}{3} = 36$ (cm^3)　直方体の部分にある水の体積は，198 − 36 = 162 (cm^3) だから，その部分の水の深さは，162 ÷ (6 × 6) = 4.5 (cm)　よって，求める高さは，8 − 4.5 = 3.5 (cm)

3. 2 本の対角線 AC，BD の交点を I，辺 AB の中点を M とする。PI = IM = 3 cm より，△PMI は直角二等辺三角形とわかるから，PM = $3\sqrt{2}$ cm　よって，求める長さは，半径が $3\sqrt{2}$ cm，中心角が，45° + 180° = 225° のおうぎ形の弧の長さだから，2 × π ×

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$3\sqrt{2} \times \frac{225}{360} = \frac{15\sqrt{2}}{4}\pi$ (cm)

4. 右図のように，AB，CD の中点をそれぞれ M，N とし，水が AB，CD，PB，PC と交わる点をそれぞれ Q，R，S，T とする。台形 QRTS について考えると，ST：BC = PS：PB = MQ：MB = 1：3 より，TS = $\frac{1}{3}$BC = 2 (cm)　また，S から QR に垂線 SU をひくと，∠SQU = ∠PMN = 45° だから，△SQU は直角二等辺三角形となり，SU = QU = (QR − ST) ÷ 2 = (6 − 2) ÷ 2 = 2 (cm)　ここで，立体 BC—QRTS を四角すい S—QBCR と三角すい C—RST に分けると，四角すい S—QBCR の体積は，長方形 QBCR × SU × $\frac{1}{3}$ = 2 × 6 × 2 × $\frac{1}{3}$ = 8 (cm^3)　三角すい C—RST の体積は，△RST × RC × $\frac{1}{3}$ = 2 × 2 × $\frac{1}{2}$ × 2 × $\frac{1}{3}$ = $\frac{4}{3}$ (cm^3)　よって，立体 BC—QRTS の体積は，8 + $\frac{4}{3}$ = $\frac{28}{3}$ (cm^3)　直方体の部分に入っている水の体積は，8 × 6 × 2 = 96 (cm^3) だから，求める水の体積は，$\frac{28}{3}$ + 96 = $\frac{316}{3}$ (cm^3)



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。